数理解析研究所講究録
第 1774 巻 2012 年 21-34

ディラック構造のテンソル積と力学への応用

早稲田大学　基幹理工学部　吉村 浩明

Hiroaki Yoshimura
School of Science and Engineering, Waseda University

1　はじめに

ディラック構造はシンプレクティック構造とポアソン構造を一般化した幾何学的構造であり，力学では，非ホロノミック拘束系や退化したラグランジュ系を取り扱うことが可能な陰的なハミルトン系及びラグランジュ系の枠組みで用いられる．ディラック構造は，物理的な解釈として，パワ保存を保つ相互接続 (interconnection) として理解できることが知られている．本論文では，ディラック構造に関するテンソル積 $\boxtimes$ を定義し，複数の異なる多様体 $M_1, ..., M_n$ 上のディラック構造 $D_1, ..., D_n$ が与えられた時，直積空間 $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ 上に相互作用のディラック構造 D_{int} を導入することで，D_{int} による $D_1, ..., D_n$ の相互接続を $D = (D_1 \oplus \cdots D_n) \boxtimes D_{\mathrm{int}}$ として定義する．特に D が $TM \oplus T^*M$ の滑らかな部分バンドルである時，M 上のディラック構造となることを示す．さらに，ディラック構造に付随するラグランジュ・ディラック系の相互接続についても示す．

2　ディラック構造と力学

線形ディラック構造.　はじめに，線形空間上のディラック構造の定義を述べる (Courant and Weinstein [8] 参照)．ある有限次元の線形空間 V を考え，その双対空間を V^* としよう．V^* と V のペアリングを $\langle \cdot, \cdot \rangle$ として，$V \oplus V^*$ 上に対称なペアリング $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ を

$$\langle\!\langle (v, \alpha), (\bar{v}, \bar{\alpha}) \rangle\!\rangle = \langle \alpha, \bar{v} \rangle + \langle \bar{\alpha}, v \rangle, \quad \text{for } (v, \alpha), (\bar{v}, \bar{\alpha}) \in V \oplus V^*$$

のように定義する．V 上のディラック構造は，対称なペアリング $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ に関して，$V \oplus V^*$ の極大な等方的部分空間 (maximally isotropic subspace)，すなわち，$D = D^{\perp}$ を満たす部分空間 $D \subset V \oplus V^*$ として定義される．但し，$D^{\perp}$ は D の $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ に関する直交補空間である．

多様体上のディラック構造.　M を滑らかな多様体とする．$TM \oplus T^*M$ は M 上のホイットニー和であり，各点 $x \in M$ 上のファイバーが $T_xM \times T_x^*M$ と等しい．ここでは，$TM \oplus T^*M$ を M 上のポントリヤーギンバンドルと呼ぶ．本論文では，特に断らない限り，多様体，ベクトルバンドル，切断など幾何学的な対象は全て滑らかであると仮定する．多様体 M 上の概ディラック構造 (almost Dirac structure) は，各点 $x \in M$ で，$D(x)$ が T_xM 上の線形ディラック構造となるものである．特に，M 上の２形式 Ω と正則なディストリビューション $\Delta_M \subset TM$ によって，M 上のディラック構造は，M の各点 x におけるファイバーが

$$\begin{aligned} D(x) = \{(v,\alpha) \in T_xM \times T_x^*M \ &\mid \text{全ての } w \in \Delta_M(x) \text{ に対して} \\ &v \in \Delta_M(x) \text{ 及び } \alpha(w) = \Omega_{\Delta_M}(x)(v,w)\ \} \end{aligned} \tag{1}$$

となるものとして定義できる．ここに，Ω_{Δ_M} は Ω の Δ_M への制限である．Ω の誘導写像 $\Omega^\flat : TM \to T^*M$ を用いて，M の各点 x で

$$D(x) = \{(v,\alpha) \in T_xM \times T_x^*M \ \mid \ v \in \Delta_M(x) \text{ 及び } \Omega^\flat(x)v - \alpha \in \Delta_M^\circ(x)\}$$

として表すこともできる．但し，Δ_M° は Δ_M の零化元である．

補題 2.1. 部分バンドル $D \subset TM \oplus T^*M$ が $\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle$ に関して極大等方的である *(maximally isotropic)* ための必要かつ十分条件は $\langle\!\langle (v,\alpha),(v,\alpha) \rangle\!\rangle = 0, \forall (v,\alpha) \in D$ である．

証明は Yoshimura and Marsden [20]，または Courant [7] を参考のこと．

Courant 括弧積.　$\Gamma(TM \oplus T^*M)$ を $TM \oplus T^*M$ の局所切断の集合としよう．$\Gamma(TM \oplus T^*M)$ には，以下に与えられる括弧積 $[\![\, ,]\!] : \Gamma(TM \oplus T^*M) \times \Gamma(TM \oplus T^*M) \to \Gamma(TM \oplus T^*M)$ が自然に備わっている．すなわち，

$$\begin{aligned} [\![(X_1,\alpha_1),(X_2,\alpha_2)]\!] &:= \left([X_1,X_2], \pounds_{X_1}\alpha_2 - \pounds_{X_2}\alpha_1 + \mathbf{d}\langle \alpha_2, X_1\rangle\right) \\ &= \left([X_1,X_2], \mathbf{i}_{X_1}\mathbf{d}\alpha_2 - \mathbf{i}_{X_2}\mathbf{d}\alpha_1 + \mathbf{d}\langle \alpha_1, X_2\rangle\right) \end{aligned}$$

であり，この括弧積は一般にヤコビの恒等式を満たさない．特に，概ディラック構造 $D \subset TM \oplus T^*M$ の積分可能条件は，$\Gamma(D)$ が Courant 括弧積に関して閉じる条件，すなわち，

$$[\![\Gamma(D),\Gamma(D)]\!] \subset \Gamma(D)$$

として与えられる (Dorfman [9] を参照).

誘導ディラック構造.　力学で最も重要なディラック構造の一つは，配位多様体上の正則なディストリビューションから誘導されるディラック構造である．以下に，誘導ディラック構造について述べる (詳細は Yoshimura and Marsden [20] を参照)．

Q を配位多様体としよう．TQ と T^*Q は Q の接バンドルと余接バンドルである．いま，$\Delta_Q \subset TQ$ を Q 上の正則なディストリビューションとして，射影 $\pi_Q : T^*Q \to Q$ の微分写像 $T\pi_Q : TT^*Q \to TQ$ を用いて

$$\Delta_{T^*Q} = (T\pi_Q)^{-1}(\Delta_Q) \subset TT^*Q$$

としてリフトすることによって，T^*Q 上のディストリビューションを定義する．ここで，T^*Q 上の２形式 Ω を用いて，Δ_Q から誘導される T^*Q 上のディラック構造 D を，各点 $(q,p) \in T^*Q$ で

$$D(q,p) = \{(v,\alpha) \in T_{(q,p)}T^*Q \times T^*_{(q,p)}T^*Q \mid \text{ 全ての } w \in \Delta_{T^*Q}(q,p) \text{ に対して } v \in \Delta_{T^*Q}(q,p) \text{ 及び } \alpha(w) = \Omega_{\Delta_Q}(q,p)(v,w)\} \tag{2}$$

なるファイバーを有する $TT^*Q \oplus T^*T^*Q$ の部分バンドルとして定義する．これは，式 (1) の特別な場合であるが，陰的なラグランジュ力学及びハミルトン力学を構成する最も基本的なディラック構造である．上式 (2) のディラック構造は誘導バンドル写像 $\Omega^\flat : TT^*Q \to T^*T^*Q$ を用いて，次のように定義することも可能である．

$$D(q,p) = \{(v,\alpha) \in T_{(q,p)}T^*Q \times T^*_{(q,p)}T^*Q \mid v \in \Delta_{T^*Q}(q,p) \text{ 及び } \alpha - \Omega^\flat(q,p) \cdot v \in \Delta^\circ_{T^*Q}(q,p)\}.$$

但し，$\Delta^\circ_{T^*Q}$ は Δ_{T^*Q} の零化元である．

注意． 一般に，拘束ディストリビューション $\Delta_Q \subset TQ$ は積分不能であり，したがって，誘導ディラック構造も一般に積分不能となる．

注意． 拘束がない場合，すなわち，$\Delta_Q = TQ$ の時，D は $\Omega^\flat : TT^*Q \to T^*T^*Q$ のグラフによって与えられる．この $D = \mathrm{graph}\,\Omega^\flat$ を正準ディラック構造と呼ぶ．

局所表現． V を Q のモデル空間とし，V の開部分空間を U としよう．このとき，TQ は局所的に $U \times V$ として，T^*Q は局所的に $U \times V^*$ として表すことができる．これらの局所表現のもと，$(q,\dot{q})$ を TQ の局所座標，(q,p) を T^*Q の局所座標とする．さらに，TT^*Q は局所的に $(U \times V^*) \times (V \times V^*)$ として，T^*T^*Q は $(U \times V^*) \times (V^* \times V)$ として表され，TT^*Q に対応する局所座標を $(q,p,\dot{q},\dot{p})$，T^*T^*Q の局所座標を (q,p,β,v) と置く．

射影 $\pi_Q : T^*Q \to Q$ は局所的に $(q,p) \mapsto q$ として，また，その微分写像は $T\pi_Q : (q,p,\dot{q},\dot{p}) \mapsto (q,\dot{q})$ と表され，これを用いると，ディストリビューションは

$$\Delta_{T^*Q} = \{(q,p,\dot{q},\dot{p}) \mid q \in U, \dot{q} \in \Delta(q)\}$$

と表される．その零化元は

$$\Delta^\circ_{T^*Q} = \{(q,p,\beta,0) \mid q \in U,\ \beta \in \Delta^\circ(q)\ \}$$

となる．$w = (q,p,\dot{q},\dot{p}) \in \Delta_{T^*Q}$ に対する局所表現として $\Omega^\flat(q,p) \cdot w = (q,p,-\dot{p},\dot{q})$ より，条件 $\alpha - \Omega^\flat(q,p) \cdot w \in \Delta^\circ_{T^*Q}$ より，$\beta + \dot{p} \in \Delta^\circ(q)$ 及び $v - \dot{q} = 0$ が得られる．ここに，$\alpha = (q,p,\beta,v)$ である．こうして，誘導ディラック構造の局所表現は

$$D(q,p) = \{((\dot{q},\dot{p}),(\beta,v)) \mid \dot{q} \in \Delta(q),\ v = \dot{q},\ \ \beta + \dot{p} \in \Delta^\circ(q)\} \tag{3}$$

と与えられる．但し，$\Delta^\circ(q) \subset T_q^*Q$ は $\Delta(q) \subset T_qQ$ の零化元である．

ラグランジュ・ディラック力学系. 次に，Yoshimura and Marsden [20; 21] に従って，誘導ディラック構造に付随する陰的なラグランジュ系，あるいは，ラグランジュ・ディラック力学系について述べる．

いま，$L : TQ \to \mathbb{R}$ ラグランジアンとしよう．但し，退化していても良い．$\Delta_Q \subset TQ$ から T^*Q 上に誘導されるディラック構造 D を式 (2) のように定義する．一般化エネルギー $E_L : TQ \oplus T^*Q \to \mathbb{R}$ を

$$E_L(q,v,p) := \langle p, v\rangle - L(q,v)$$

として与えると，ラグランジュ・ディラック系は，各点 $(q,v,p) \in TQ \oplus T^*Q$ において

$$(X(q,v,p), \mathbf{d}E_L(q,v,p)|_{T_{(q,p)}P}) \in D(q,p) \tag{4}$$

を満たす (E_L, D, X) で与えられる．但し，$X : TQ \oplus T^*Q \to TT^*Q$ は $TQ \oplus T^*Q$ 上の部分ベクトル場であり，各点 $(q,v,p) \in TQ \oplus T^*Q$ に対して，$(q,p) = \mathbb{F}L(q,v) \in P$ におけるベクトル $X(q,v,p) = (q,p,\dot{q},\dot{p}) \in T_{(q,p)}T^*Q$ を対応づける写像である．ここに，$(q,v) \in \Delta_Q$ であり，$\mathbb{F}L : TQ \to T^*Q$ はルジャンドル変換を表す．また，$\dot{q} = dq/dt$, $\dot{p} = dp/dt$ である．E_L の微分 $\mathbf{d}E_L(q,v,p) : T_{(q,v,p)}(TQ \oplus T^*Q) \to \mathbb{R}$ は点 (q,v,p) の接空間 $T_{(q,v,p)}(TQ \oplus T^*Q)$ 上の関数であり，$T_{(q,p)}P$ に制限すると，$\mathbf{d}E_L(q,v,p)|_{T_{(q,p)}P} \cong (-\partial L/\partial q, v)$ となり，$T_{(q,p)}P$ 上の関数と見なすことができる．

局所表現. 式 (3) より，ラグランジュ・ディラック系 $(X, \mathbf{d}E_L|_{TP}) \in \Gamma(D)$ は局所的に

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \dot{q} = v \in \Delta_Q(q), \quad \dot{p} - \frac{\partial L}{\partial q} \in \Delta_Q^\circ(q)$$

として表される．運動学的な拘束がない場合，すなわち，$\Delta_Q = TQ$ の時，陰的なオイラー・ラグランジュ方程式を得る．

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \dot{q} = v, \quad \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

注意. 部分ベクトル場 $X : TQ \oplus T^*Q \to TT^*Q$ が条件 (4) を満足する時，ルジャンドル変換 $(q,p) = (q, \partial L/\partial v) \in P = \mathbb{F}L(\Delta_Q)$ はベース点の等価性を保証しており，これにより，2 階ベクトル場の条件 $\dot{q} = v$ を得ることができる．言い換えると，部分ベクトル場 X は，ルジャンドル変換のグラフ上で唯一定まる．

3 ディラック構造のテンソル積

本節では，異なるディラック構造の相互接続に関する数学的なモデルを作るために，ディラック構造のテンソル積 $\boxtimes$ を導入する．さらに，異なるディラック構造の間に相互作用を与えるディラック構造 D_{int} を定義する．力学に現れる典型的な相互作用のディラック構造はニュートンの第 3 法則によって与えられる．特に，D_{int} とディラックテンソル積 $\boxtimes$ を用いて，異なるディラック構造 $D_1, ..., D_n$ の相互接続が $D = (D_1 \oplus \cdots \oplus D_n) \boxtimes D_{\mathrm{int}}$ のように表されることを以下に見て行こう．

ディラック構造の直和. 2つの異なるディラック構造の場合を考えてみよう．M_1 と M_2 を異なる滑らかな多様体としよう．$\mathrm{pr}_{M_i} : M_1 \times M_2 \to M_i,\ i = 1, 2,$ を自然な射影とし，$\mathrm{Dir}(M_i)$ を M_i 上の（概）ディラック構造の集合としよう．

定義 3.1. $D_1 \in \mathrm{Dir}(M_1)$ 及び $D_2 \in \mathrm{Dir}(M_2)$ を与えると，D_1 と D_2 の直和は，各点 $m = (m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ で

$$D_1 \oplus D_2(m) = \{((v_1, v_2), T_m^* \mathrm{pr}_{M_1}(\alpha_1) + T_m^* \mathrm{pr}_{M_2}(\alpha_2)) \in T_m(M_1 \times M_2) \times T_m^*(M_1 \times M_2) | \\ (v_1, \alpha_1) \in D_1(m_1),\ \ (v_2, \alpha_2) \in D_2(m_2)\}$$

として定義できる．

命題 3.2. $D_1 \in \mathrm{Dir}(M_1), D_2 \in \mathrm{Dir}(M_2)$ ならば $D_1 \oplus D_2 \in \mathrm{Dir}(M_1 \times M_2)$ である．

証明. $(v, \alpha) \in D_1 \oplus D_2(m)$ としよう．各点 $m \in M$ で $\dim(D_1 \oplus D_2(m)) = \dim(D_1(m_1)) + \dim(D_2(m_2)) = \dim(M_1 \times M_2)$ である．定義より，ある $\alpha_1 \in T_{m_1}^* M_1$ と $\alpha_2 \in T_{m_2}^* M_2$ に対して，$(v_1, \alpha_1) \in D_1(m_1)$ と $(v_2, \alpha_2) \in D_2(m_2)$ となるように，$v = (v_1, v_2) \in T_m(M_1 \times M_2)$ 及び $\alpha = T_m^* \mathrm{pr}_{M_1}(\alpha_1) + T_m^* \mathrm{pr}_{M_2}(\alpha_2)$ が成立する．この時，点 $m \in M_1 \times M_2$ における $(v, \alpha) \in D_1 \oplus D_2(m)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle (v, \alpha), (v, \alpha) \rangle\!\rangle &= 2 \langle \alpha, v \rangle \\
&= 2 \left\langle T_m^* \mathrm{pr}_{M_1}(\alpha_1) + T_m^* \mathrm{pr}_{M_2}(\alpha_2), v \right\rangle \\
&= 2 \left\langle \alpha_1, T_m \mathrm{pr}_{M_1}(v) \right\rangle + 2 \left\langle \alpha_2, T_m \mathrm{pr}_{M_2}(v) \right\rangle \\
&= 2 \langle \alpha_1, v_1 \rangle + 2 \langle \alpha_2, v_2 \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．これは，$(v_1, \alpha_1) \in D_1(m_1)$ 及び $(v_2, \alpha_2) \in D_2(m_2)$ より明らか．一方，$D_1 \oplus D_2$ は，補題 2.1 より，$T(M_1 \times M_2) \oplus T^*(M_1 \times M_2)$ の極大の等方的部分空間となり，$M_1 \times M_2$ 上のディラック構造となることが判る． □

誘導ディラック構造の直和. Q_1 と Q_2 を異なる多様体とする．$\Delta_{Q_1} \subset TQ_1$ と $\Delta_{Q_2} \subset TQ_2$ を滑らかな拘束ディストリビューションとする．これにより，ディラック構造 D_1 及び D_2 が定義できる．但し，$\Delta_{Q_1} \cap \Delta_{Q_2} = \emptyset$ を仮定する．2つの配位多様体の直積として拡大配位空間 $Q = Q_1 \times Q_2$ を導入し，$TQ = T(Q_1 \times Q_2)$ と $TQ_1 \times TQ_2$，$T^*Q = T^*(Q_1 \times Q_2)$ と $T^*Q_1 \times T^*Q_2$ を同一視する．さらに，$\mathfrak{d}_Q = \Delta_{Q_1} \times \Delta_{Q_2} \subset TQ$ から誘導される T^*Q 上の拘束ディストリビューション $\mathfrak{d}_{T^*Q} = (T\pi_Q)^{-1}(\mathfrak{d}_Q)$ を定義する．

命題 3.3. Ω_i を T^*Q_i 上の正準 2 形式とし，$\Delta_{Q_i} \subset TQ_i$ から誘導される T^*Q_i 上のディラック構造 D_i を定義しよう．この時，$D_1 \oplus D_2$ は，$\mathfrak{d}_Q$ から誘導される T^*Q 上のディラック構造 D と等しく，各点 $(q, p) \in T^*Q$

で

$$D(q,p) = \{\,(w,\alpha) \in T_{(q,p)}T^*Q \times T^*_{(q,p)}T^*Q \mid w \in \mathfrak{d}_{T^*Q}(q,p)$$
$$\text{及び}\ \ \alpha - \Omega^\flat(q,p)\cdot w \in \mathfrak{d}^\circ_{T^*Q}(q,p)\,\} \tag{5}$$

と表される．ここに，$\Omega^\flat : TT^*Q \to T^*T^*Q$ は $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$ の誘導バンドル写像である．

証明. Ω は T^*Q 上の正準２形式であり，D は Δ_Q から誘導されるディラック構造であり，式 (5) で表されることは明らか．次に，各点 $(q,p) \in T^*Q$ で $(w,\alpha) \in D_1 \oplus D_2(q,p)$ を選ぶと，(w,α) を $w = (w_1, w_2)$ 及び $\alpha = T^*_{(q,p)}\,\mathrm{pr}_{T^*Q_1}(\alpha_1) + T^*_{(q,p)}\,\mathrm{pr}_{T^*Q_2}(\alpha_2)$ として $(w_1,\alpha_1) \in D_1(q_1,p_1)$ 及び $(w_2,\alpha_2) \in D_2(q_2,p_2)$ となるように分解できる．この時，$\alpha_1 - \Omega_1^\flat(q_1,p_1)\cdot w_1 \in \Delta^\circ_{T^*Q_1}(q_1,p_1)$ 及び $\alpha_2 - \Omega_2^\flat(q_2,p_2)\cdot w_2 \in \Delta^\circ_{T^*Q_2}(q_2,p_2)$ となる．但し，$w_1 \in \Delta_{T^*Q_1}(q_1,p_1)$ 及び $w_2 \in \Delta_{T^*Q_2}(q_2,p_2)$ である．$\Omega^\flat(q,p) = \Omega_1^\flat(q_1,p_1) \oplus \Omega_2^\flat(q_2,p_2)$ 及び $w = (w_1,w_2) \in \Delta_{T^*Q_1}(q_1,p_1) \times \Delta_{T^*Q_2}(q_1,p_2)$ であることに注意すると，$\alpha - \Omega^\flat(q,p)\cdot w \in \Delta^\circ_{T^*Q_1}(q_1,p_1) \times \Delta^\circ_{T^*Q_2}(q_2,p_2)$ を得る．さらに，$T\pi_Q(\Delta_{T^*Q_1} \times \Delta_{T^*Q_2}) = \Delta_{Q_1} \times \Delta_{Q_2} = \mathfrak{d}_Q \subset TQ$ である．これにより，各点 (q,p) のファイバー $T_{(q,p)}T^*Q$ ごとに，$\mathfrak{d}_{T^*Q} = \Delta_{T^*Q_1} \times \Delta_{T^*Q_2}$ と置くことができる．また，$\mathfrak{d}^\circ_{T^*Q} = \Delta^\circ_{T^*Q_1} \times \Delta^\circ_{T^*Q_2}$ は明らか．全てをまとめると，各点 $(q,p) \in T^*Q$ ごとに，$w \in \mathfrak{d}_{T^*Q}(q,p)$ 及び $\alpha - \Omega^\flat(q,p)\cdot w \in \mathfrak{d}^\circ_{T^*Q}(q,p)$ が成立する．こうして，$D_1 \oplus D_2$ と D は等しいことが判る．□

相互作用のディラック構造. 異なるディラック構造を相互接続するために，相互作用のディラック構造と呼ばれる特別なディラック構造を導入する．

定義 3.4. 滑らかなディストリビューション $\Sigma_Q \subset TQ$ を与えよう．但し，

$$\mathfrak{d}_Q \neq \Sigma_Q \quad \text{及び} \quad \mathfrak{d}_Q \cap \Sigma_Q \neq \emptyset$$

が成立すると仮定する．さらに，Σ_Q を T^*Q 上にリフトして

$$\Sigma_{\mathrm{int}} = (T\pi_Q)^{-1}(\Sigma_Q) \subset TT^*Q$$

を定義する．$\Sigma^\circ_{\mathrm{int}}$ を Σ_{int} の零化元とする時，T^*Q 上の**相互作用のディラック構造**は，各点 $(q,p) \in T^*Q$ で

$$D_{\mathrm{int}} = \Sigma_{\mathrm{int}} \times \Sigma^\circ_{\mathrm{int}} \tag{6}$$

として定義できる．この相互作用のディラック構造は，力学では**ニュートンの作用反作用の法則**から導かれる．以下に，例を示す．

例: 接触する２物体の運動. ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 中を接触して運動する２物体 (質点) を考えよう．速度を $(v_1, v_2) \in V$ と置く．２つの物体は接触点で共通の速度を持っているので

$$(v_1, v_2) \in \Sigma_{\mathrm{int}} \subset V$$

である．ここに，$\Sigma_{\rm int} = \{(v_1, v_2) \mid v_1 = v_2\}$ は V の拘束ディストリビューションである．この拘束に付随して，力 $(F_1, F_2) \in V^*$ は，ニュートンの作用反作用の法則より

$$(F_1, F_2) \in \Sigma_{\rm int}^\circ \subset V^*$$

を満たす．ここに，$\Sigma_{\rm int}^\circ = \{(F_1, F_2) \mid F_1 = -F_2\}$ は $\Delta_{\rm int}$ の零化元である．よって，V 上のディラック構造として，$D_{\rm int} = \Sigma_{\rm int} \times \Sigma_{\rm int}^\circ$ が定義できる．ここに，$(v_1, F_1), (v_2, F_2) \in D_{\rm int}$ であることは言うまでもない．

注意． 上に述べた相互作用のディラック構造は，拘束ディストリビューションとその零化元の直積によって定義されるものであるが，T^*Q 上の 2 形式 $\Omega_{\rm int}$ と拘束ディストリビューション $\Sigma_{\rm int}$ で定義される一般的なクラスの相互作用のディラック構造を考えることもできる．実際，$D_{\rm int}$ として，磁場中を運動する質点の定式化において，Q 上の磁場的な 2 形式から誘導されるディラック構造を定義することができる．このような一般的な場合は，それに付随するラグランジュ・ディラック系を導く変分構造は，ラグランジュ簡約に関連して極めて複雑なものであることが予想されるため，ここでは，標準的な相互作用のディラック構造として拘束ディストリビューション $\Sigma_{\rm int}$ とその零化元 $\Sigma_{\rm int}^\circ$ から導かれるものについてのみ考察する．

ディラック構造のテンソル積． ディラック構造の相互接続を定義するための数学的な準備として，ここでは，ディラック構造のテンソル積を定義しよう．

定義 3.5. 2 つのディラック構造 $D_a, D_b \in {\rm Dir}(M)$ を考え，$d : M \hookrightarrow M \times M$ を $M \times M$ への対角埋め込み写像とする．D_a と D_b のテンソル積は

$$D_a \boxtimes D_b := d^*(D_a \oplus D_b) = \frac{(D_a \oplus D_b \cap K^\perp) + K}{K} \tag{7}$$

と定義できる．ここに，

$$K = \{(0,0)\} \oplus \{(\beta, -\beta)\} \subset T(M \times M) \oplus T^*(M \times M)$$

はコディストリビューションであり，その直交補空間 $K^\perp \subset T(M \times M) \oplus T^*(M \times M)$ は

$$K^\perp = \{(v, v)\} \oplus T^*(M \times M)$$

として与えられる．

定理 3.6. $D_a \oplus D_b \cap K^\perp$ は各点 $x \in M$ の近傍でランクが一定であると仮定すると，$D_a \boxtimes D_b$ は M 上のディラック構造となる．

注意. $D_a, D_b \in \mathrm{Dir}(M)$ に関するテンソル積 $\boxtimes$ は

$$D_a \boxtimes D_b = \{(v,\alpha) \in TM \oplus T^*M \mid \exists \beta \in T^*M \\ \text{但し}, (v, \alpha+\beta) \in D_a,\ (v,-\beta) \in D_b\} \tag{8}$$

として定義できる.

注意. 式 (7) で与えられたテンソル積は，Gualtieri [11] 及び Alekseev, Bursztyn and Meinrenken [2] によって，各々，complex geometry 及び pure spinor に関連して導入された．著者等は，これらとは独立に古典力学の観点から式 (8) で与えられるディラック構造のテンソル積を考案した．但し，記号としては $\boxtimes$ ではなく $\bowtie$ を用いて，$D_a \bowtie D_b$ と書き，Bowtie Product と呼んだ（Yoshimura, Jacobs and Marsden [23] 及び Jacobs, Yoshimura and Marsden [12] を参照）．その後，Gualtieri 等が既に同様のテンソル積を定義していることが判明したため[1]，本論文では，Gualtieri の定義 3.5 及び記号 $\boxtimes$ を採用したが，式 (7) と式 (8) とは全く等価であることは言うまでもない.

テンソル積の性質. 式 (1) で見たように，M 上のディラック構造 D は M 上の 2 形式とディストリビューション Δ_M で定義できるが，逆に，M 上のディラック構造 D を与えると，$\Delta_M = \mathrm{pr}_{TM}(D) \subset TM$ と 2 形式 Ω_{Δ_M} が定義できる (Courant and Weinstein [8] 及び Courant [7] を参照)．ここに，$\mathrm{pr}_{TM} : TM \oplus T^*M \to TM;\ (v,\alpha) \mapsto v$ であり，Δ_M は滑らかであると仮定する.

命題 3.7. D_a と $D_b \in \mathrm{Dir}(M)$ を与え，$\Delta_a = \mathrm{pr}_{TM}(D_a)$ と $\Delta_b = \mathrm{pr}_{TM}(D_b)$ を考える．Ω_a と Ω_b は D_a 及び D_b に対応する 2 形式である．もしも，$\Delta_a \cap \Delta_b$ が $x \in M$ の各点の近傍で一定のランクを持つとき，$D_a \boxtimes D_b$ は滑らかなディストリビューション $\mathrm{pr}_{TM}(D_a \boxtimes D_b) = \Delta_a \cap \Delta_b$ と 2 形式 $(\Omega_a + \Omega_b)|_{\Delta_a \cap \Delta_b}$ を有するディラック構造である.

証明. 各点 $x \in M$ で $(v,\alpha) \in D_a \boxtimes D_b(x)$ としよう．式 (8) の定義より，$\beta \in T_x^*M$ が存在して，各点 $x \in M$ で $(v, \alpha+\beta) \in D_a(x), (v,-\beta) \in D_b(x)$ を満たす．こうして，各点 $x \in M$ で

$$\Omega_a^\flat(x)\cdot v - \alpha - \beta \in \Delta_a^\circ(x) \ \text{及び}\ \Omega_b^\flat(x)\cdot v + \beta \in \Delta_b^\circ(x)$$

が成立する．ここに，$v \in \Delta_a(x)$ 及び $v \in \Delta_b(x)$ である．このことより，$(\Omega_a^\flat + \Omega_b^\flat)(x)\cdot v - \alpha \in \Delta_a^\circ(x) + \Delta_b^\circ(x)$ 及び $v \in \Delta_a \cap \Delta_b(x)$ となる．しかし，$\Delta_a^\circ(x) + \Delta_b^\circ(x) = (\Delta_a \cap \Delta_b)^\circ(x)$ であり，$\Omega_c = \Omega_a + \Omega_b$ 及び $\Delta_c = \Delta_a \cap \Delta_b$ と置くことで，$\Omega_c^\flat(x)\cdot v - \alpha \in \Delta_c^\circ(x)$ 及び $v \in \Delta_c(x)$，すなわち，$(v,\alpha) \in D_c(x)$ が成立する．ここに，D_c は Δ_c と Ω_c で定義される．こうして，$D_a \boxtimes D_b \subset D_c$ が判る．等号は $D_a \boxtimes D_b(x)$ 及び $D_c(x)$ が $T_xM \times T_x^*M$ の部分空間で同じ次元を有することから成立する. □

系 3.8. もし $\Omega_b = 0$ ならば，$D_b = \Delta_b \oplus \Delta_b^\circ$ となる．この時，$D_c = D_a \boxtimes D_b$ は $\Delta_a \cap \Delta_b$ と $\Omega_a|_{\Delta_a \cap \Delta_b}$ から誘導される.

[1]著者が Iberoamerican Meeting on Geometry, Mechanics and Control in honor of Hernán Cendra at Centro Atómico Bariloche, January 13, 2011 で発表した際に，Henrique Bursztyn から既に $\bowtie$ と等価なテンソル積が知られていることを指摘された.

異なる誘導ディラック構造の相互接続. Q_1，Q_2 を異なる多様体としよう．$D_1 \in \mathrm{Dir}(T^*Q_1)$ と $D_2 \in \mathrm{Dir}(T^*Q_2)$ を滑らかなディストリビューション $\Delta_{Q_1} \subset TQ_1$ と $\Delta_{Q_2} \subset TQ_2$ から誘導されるディラック構造とする．さらに，Σ_Q を $Q = Q_1 \times Q_2$ 上のディストリビューションとし，D_{int} を定義 3.4 で与えられる相互作用のディラック構造としよう．

定義 3.9. D_{int} による D_1 と D_2 の相互接続は，

$$D = (D_1 \oplus D_2) \boxtimes D_{\mathrm{int}}$$

として定義される．

$\Delta_Q = (\Delta_{Q_1} \times \Delta_{Q_2}) \cap \Sigma_Q$ は Q の各点の近傍で一定のランクを持つ時，D は Δ_Q から誘導される T^*Q 上のディラック構造となり，各点 $(q,p) \in T^*Q$ で

$$\begin{aligned} D(q,p) = \{\, (w,\alpha) \in T_{(q,p)}T^*Q \times T^*_{(q,p)}T^*Q \;\mid \\ w \in \Delta_{T^*Q}(q,p) \ \text{及び}\ \alpha - \Omega^\flat(q,p)\cdot w \in \Delta^\circ_{T^*Q}(q,p)\,\} \end{aligned}$$

と表される．ここに，$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$ 及び $\Delta_{T^*Q} = T\pi_Q^{-1}(\Delta_Q)$ である．

n 個のディラック構造の相互接続. n 個の異なる多様体 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ 上のディラック構造 $D_1, D_2, \ldots, D_n$ を考えよう．但し，$n > 2$ とする．直和 $\oplus$ は結合律を満たし，$(D_a \oplus D_b) \oplus D_c = D_a \oplus (D_b \oplus D_c)$ とすることができる．そこで，

$$\bigoplus_{i=1}^{n} D_i = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_n$$

と置く．ここで，直積空間 $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ 上に，適当な相互作用のディラック構造

$$D_{\mathrm{int}} \in \mathrm{Dir}(M)$$

を与え，各点 $x \in M$ の近傍で $\mathrm{rank}(\mathrm{pr}_{TM}(\oplus D_i) \cap \mathrm{pr}_{TM}(D_{\mathrm{int}}))$ が一定であると仮定すると，n 個のディラック構造 D_i は D_{int} を介して

$$D = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} D_i\right) \boxtimes D_{\mathrm{int}}$$

のように相互接続され，M 上の一つのディラック構造を得ることができる．

4 ラグランジュ・ディラック系の相互接続

n 個の異なるラグランジュ・ディラック系. ここでは，n 個の異なるラグランジュ・ディラック系を与え，ディラック構造と共に相互接続された一つのラグランジュ・ディラック系として理解できることを示す．

まず，$T^*Q_i, i = 1, ..., n$ 上のディラック構造 D_i を考えよう．各々は，滑らかなディストリビューション $\Delta_{Q_i} \subset TQ_i$ から誘導されるものとする．但し，$\Delta_{Q_i} \cap \Delta_{Q_j} = \emptyset$, $i \neq j$ を仮定する．TQ_i 上にラグランジア

ン L_i を与えよう．これらのラグランジアンは退化していても良い．E_{L_i} を L_i に付随する $TQ_i \oplus T^*Q_i$ 上の一般化エネルギーとする．また，$X_i : TQ_i \oplus T^*Q_i \to TT^*Q_i$ を $\Delta_{Q_i} \oplus P_i$ の各点で定義された部分ベクトル場とする．ここに，$P_i = \mathbb{F}L_i(\Delta_{Q_i})$ である．n 個の異なるラグランジュ・ディラック系は (E_{L_i}, D_i, X_i) で与えられ，条件

$$(X_i, \mathbf{d}E_{L_i}|_{TP_i}) \in \Gamma(D_i), \quad i = 1, ..., n$$

を満たす．これより，直ちに，(E_{L_i}, D_i, X_i) の局所表現として

$$\dot{q}_i = v_i \in \Delta_{Q_i}(q_i), \quad \dot{p}_i - \frac{\partial L_i}{\partial q_i} \in \Delta^\circ_{Q_i}(q_i), \quad p_i = \frac{\partial L_i}{\partial v_i}, \quad i = 1, ..., n$$

を得る．(E_{L_i}, D_i, X_i) は各々が独立しており，物理的な相互作用は無いことに注意する必要がある．

ラグランジュ・ディラック系の相互接続． 次に，相互作用のディラック構造 D_{int} を与えることにより，n 個のラグランジュ・ディラック系を相互接続してみよう．そのために，拡大配位空間 $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n$ 及びディストリビューション $\mathfrak{d}_Q = \Delta_{Q_1} \times \cdots \times \Delta_{Q_n} \subset TQ$ を考える．また，$\mathfrak{d}_Q \neq \Sigma_Q$ と $\mathfrak{d}_Q \cap \Sigma_Q \neq \emptyset$ を仮定して，滑らかなディストリビューション $\Sigma_Q \subset TQ$ を考える．さらに，$\Delta_Q = \mathfrak{d}_Q \cap \Sigma_Q \subset TQ$ を定義し，$\mathrm{rank}(\Delta_Q(q))$ が各点 $q \in Q$ で一定であると仮定する．これにより，式 (6) のように，相互作用のディラック構造 $D_{\mathrm{int}} = \Sigma_{\mathrm{int}} \oplus \Sigma^\circ_{\mathrm{int}}$ を定義する．ここに，$\Sigma_{\mathrm{int}} = (T\pi_Q)^{-1}(\Sigma_Q)$．また，$q = (q_1, ..., q_n) \in Q$, $(q, v) = (q_1, ..., q_n, v_1, ..., v_n) \in TQ$ 及び $(q, p) = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) \in T^*Q$ と置く．

定義 4.1. 条件 $(X_i, \mathbf{d}E_{L_i}|_{TP_i}) \in \Gamma(D_i)$ を満たす n 個のラグランジュ・ディラック系 (E_{L_i}, D_i, X_i) を考える．TQ 上のラグランジアンとして $L = L_1 + \cdots + L_n$ を定義し，L に付随する一般化エネルギー $E_L : TQ \oplus T^*Q \to \mathbb{R}$ を $E_L = \langle p, v \rangle - L(q, v)$ と置く．$\Delta_Q \oplus P$ で定義された部分ベクトル場を $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n : TQ \oplus T^*Q \to TT^*Q$ とする．但し，$P = \mathbb{F}L(\Delta_Q)$ である．また，相互接続されたディラック構造を $D = (D_1 \oplus \cdots \oplus D_n) \boxtimes D_{\mathrm{int}}$ とする．

この時，n 個のラグランジュ・ディラック系の相互接続は (E_L, D, X) で与えられ，各点 $(q, v, p) \in TQ \oplus T^*Q$ で

$$(X(q, v, p), \mathbf{d}E_L(q, v, p)|_{T_{(q,p)}P}) \in D(q, p)$$

を満たす．ここに，$(q, v) \in \Delta_Q$ 及び $(q, p) = \mathbb{F}L(q, v) \in P$ である．

命題 4.2. ラグランジュ・ディラック系の局所表現は

$$\dot{q} = v \in \Delta_Q(q), \quad \dot{p} - \frac{\partial L}{\partial q} \in \Delta^\circ_Q(q), \quad p = \frac{\partial L}{\partial v}$$

と与えられる．ここで，$\Delta_Q(q) = \mathfrak{d}_Q(q) \cap \Sigma_Q(q) = (\Delta_{Q_1}(q_1) \times \cdots \times \Delta_{Q_n}(q_n)) \cap \Sigma_Q(q) \subset T_qQ$ は最終的なディストリビューションであり，$\Delta^\circ_Q(q) = \mathfrak{d}^\circ_Q(q) + \Sigma^\circ_Q(q) = (\Delta^\circ_{Q_1}(q_1) \times \cdots \times \Delta^\circ_{Q_n}(q_n)) + \Sigma^\circ_Q(q) \subset T^*_qQ$ はその零化元である．

命題 4.2 の証明は簡単にできるので省略する．以下に，ラグランジュ・ディラック力学系の相互接続に関する重要な定理を述べる．

定理 4.3. あるベクトル場 $F_i : TQ_i \oplus T^*Q_i \to T^*Q_i,\ i = 1, ..., n$ を考える．$\mathrm{pr}_{Q_i} : TQ_i \oplus T^*Q_i \to Q_i$ を自然な射影とする．$F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n : TQ \oplus T^*Q \to T^*Q$ 及び $\rho_{TQ_i \oplus T^*Q_i} : TQ \oplus T^*Q \to TQ_i \oplus T^*Q_i; (q, v, p) \mapsto (q_i, v_i, p_i)$ と置く．ここに，TQ と $TQ_1 \times \cdots \times TQ_n$ を，また，T^*Q と $T^*Q_1 \times \cdots \times T^*Q_n$ を同一視する．

以下の言明は等価である．

(i) 曲線 $(q(t), v(t), p(t)) \in TQ \oplus T^*Q,\ t_1 \le t \le t_2$ は

$$\big((\dot{q}(t), \dot{p}(t)), \mathbf{d}E_L(q(t), v(t), p(t))|_{T_{(q(t),p(t))}P}\big) \in D(q(t), p(t))$$

を満たす．但し，$(q(t), p(t)) = \mathbb{F}L(q(t), v(t)) \in P$.

(ii) 曲線 $(q_i(t), v_i(t), p_i(t)) = \rho_{TQ_i \oplus T^*Q_i}(q(t), v(t), p(t)),\ t_1 \le t \le t_2$ は

$$((\dot{q}_i(t), \dot{p}_i(t)), (\mathbf{d}E_{L_i} - \mathrm{pr}^*_{Q_i} F_i)(q_i(t), v_i(t), p_i(t))|_{T_{(q_i(t),p_i(t))}P_i}) \in D_i(q_i(t), p_i(t))$$

を満足する．但し，$(q_i(t), p_i(t)) = \mathbb{F}L_i(q_i(t), v_i(t)) \in P_i$ であり，速度と力に関して，

$$\dot{q}(t) = (\dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_n(t)) \in \Sigma_Q(q(t)) \ \text{ 及び } \ F(q(t), v(t), p(t)) \in \Sigma_Q^{\circ}(q(t))$$

を満たす．

証明. $D = (D_1 \oplus \cdots \oplus D_n) \boxtimes D_{\mathrm{int}}$ に注意して，条件

$$((\dot{q}(t), \dot{p}(t)), \mathbf{d}E(q(t), v(t), p(t))|_{T_{(q(t),p(t))}P}) \in D(q(t), p(t)), \text{ for all } t_1 \le t \le t_2$$

より，あるコベクトル

$$(F, w) = (F_1, \ldots, F_n, w_1, \ldots, w_n) \in T^*_{(q,p)}T^*Q$$

が存在して，

$$\left(\dot{q}, \dot{p}, -\frac{\partial L}{\partial q} - F, v + w\right) \in D_1(q_1, p_1) \oplus \cdots \oplus D_n(q_n, p_n) \tag{9}$$

及び

$$(\dot{q}, \dot{p}, F, -w) \in D_{\mathrm{int}}(q, p) \tag{10}$$

を満たす．条件 (9) より，

$$\left(\dot{q}_i, \dot{p}_i, -\frac{\partial L_i}{\partial q_i} - F_i, v_i + w_i\right) \in D_i(q_i, p_i), \quad i = 1, ..., n$$

であるが，条件 (10) より，$\dot{q} \in \Sigma_Q(q), w = 0$ 及び $F \in \Sigma_Q^\circ(q)$ である．ここに，$\partial L/\partial q_i = \partial L_i/\partial q_i$ を用いた．こうして，曲線 $(q_i(t), v_i(t), p_i(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$ は，条件

$$\left((\dot{q}_i(t), \dot{p}_i(t)), (\mathbf{d}E_i - \mathrm{pr}_{Q_i}^* F_i)(q_i(t), v_i(t), p_i(t))\big|_{T_{(q_i(t),p_i(t))}P_i} \right) \in D_i(q_i(t), p_i(t)), \;\; i = 1, ..., n$$

を満足する．但し，$(q_i(t), p_i(t)) = \mathbb{F}L_i(q_i(t), v_i(t)) \in P_i$ である．逆も同様に示すことができる． □

5 おわりに

本論文では，異なるディラック構造の相互接続について考察を行った．特に，相互作用のディラック構造及びディラック構造のテンソル積を導入することにより，ディラック構造の相互接続に関する数学的な定義を与えた．さらに，ディラック構造に付随するラグランジュ力学系の相互接続についても明らかにした．この理論的枠組みにより，物理や工学に現れる大規模かつ複雑な力学系に現れるエネルギーの相互作用について，ディラック構造とその相互接続によって組織的な理解が可能となることが期待できる．

本論文では述べなかった，相互接続されたラグランジュ・ディラック系の変分構造や非ホロノミック系への応用については，Jacobs and Yoshimura [13] を参照されたい．

謝 辞． 本研究は，カリフォルニア工科大学の Henry Jacobs との共同研究の成果に基づいている．Henry Jacobs ならびに Henrique Bursztyn, Arjan van der Schaft と Alan Weinstein には適切な助言と議論をしていただいた．ここに謝意を表します．本研究の一部は，科学技術振興財団 CREST，日本学術振興会・科学研究費基盤 C (課題番号 23560269) 及び早稲田大学特定課題研究重点助成 (課題番号 2010A-606) の支援を受けている．

参考文献

[1] Abraham, R. and J. E. Marsden [2008], *Foundations of Mechanics.* Originally published in 1967; second edition, 1978; the updated 1985 version reprinted by AMS-Chelsea in 2008, second edition.

[2] Alekseev, A., H. Bursztyn, and E. Meinrenken [2009], Pure spinors on Lie groups, *Asterisque.* **327**, 131–199.

[3] Baños, A., J. Cevera, and A. J. van Der Schaft [2007], Interconnection of port-Hamiltonian systems and composition of Dirac structures. *Automatica*, 43(2), 212–225.

[4] Blankenstein, G. [2000], *Implicit Hamiltonian Systems: Symmetry and Interconnection*, Ph.D. Dissertation. University of Twente.

[5] Bursztyn, H. and O. Radko [2003], Gauged equivalence of Dirac structures and symplectic groupoids, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53**, 309–337.

[6] Cervera, J., A. J. van der Schaft, and A. Banos [2007], Interconnection of port-Hamiltonian systems and composition of Dirac structures. *Automatica*, **43**, 212–225.

[7] Courant, T. J. [1990], Dirac manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **319**, 631–661.

[8] Courant, T. and A. Weinstein [1988], Beyond Poisson structures. In *Action hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie (Lyon, 1986)*, volume 27 of *Travaux en Cours*, pages 39–49. Hermann, Paris.

[9] Dorfman, I. [1993], *Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations.* Nonlinear Science: Theory and Applications. John Wiley & Sons Ltd., Chichester.

[10] Dufour, J-P. and A. Wade [2004], On the local structure of Dirac manifolds, arXiv:math/0405257.

[11] Gualtieri, M. [2007], Generalized complex structures, *Preprint*, arXiv:math/0703298v2.

[12] Jacobs, H., H. Yoshimura, and J. E. Marsden [2010], Interconnection of Lagrange-Dirac dynamical systems for electric circuits, *AIP Conference Proceedings*, **1281**(1), 566–569.

[13] Jacobs, H. and H. Yoshimura [2012], Tensor Products of Dirac Structures and Interconnection in Lagrangian Mechanics, *Preprint*, pages 1–30.

[14] Jotz, M. and T. Ratiu [2008], Dirac and non-holonomic reduction, *Preprint.*

[15] Kron, G. [1963], *Diakoptics -The Piecewise Solution of Large-Scale Systems.* MacDonald, London.

[16] Marsden, J. E. and T. S. Ratiu [1999], *Introduction to Mechanics and Symmetry*, volume 17 of *Texts in Applied Mathematics.* Springer-Verlag, second edition.

[17] van der Schaft, A. J. [1996], Port Hamiltonian systems: an introductory survey, *Proceedings of the International Conference of Mathematics* **3**, pages 1–27, European Mathematical Society.

[18] van der Schaft, A. J. and B. M. Maschke [1995], The Hamiltonian formulation of energy conserving physical systems with external ports, *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik* **49**, 362–371.

[19] Weinstein, A. [2009], Symplectic categories, *Preprint*, arXiv:0911.4133v1.

[20] Yoshimura, H. and J. E. Marsden [2006a], Dirac structures in Lagrangian mechanics Part I: Implicit Lagrangian systems, *J. Geom. and Phys.*, **57**, 133–156.

[21] Yoshimura, H. and J. E. Marsden [2006b], Dirac structures in Lagrangian mechanics Part II: Variational structures, *J. Geom. and Phys.*, **57**, 209–250.

[22] Yoshimura, H. and J. E. Marsden [2007b], Reduction of Dirac structures and the Hamilton-Pontryagin principle, *Reports on Mathematical Physics*, **60**, 381–426.

[23] Yoshimura, H., H. Jacobs and J. E. Marsden [2010], Interconnection of Dirac structures and Lagrange-Dirac dynamical systems, *Proceedings of Mathematical Theory on Networks and Systems in 2010, Budapest*, July 5–9. pages 1–6.